

Mathematical Impact of Relative Motion in the Deformation of Time Intervals

Javier Viaña¹[0000-0002-0563-784X]

¹ University of Cincinnati, Cincinnati OH 45219, USA
vianajr@mail.uc.edu

Se considera una masa (m) en el espacio, con un punto (A) que tiene una velocidad (v) relativa a un observador (O), tal y como se muestra según in Fig. 1.

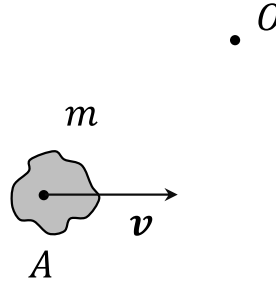


Fig. 1. Relative velocity of the point A with respect to the observer O

Por estar en movimiento, el punto A pasa por diferentes posiciones fijas en el espacio. Supóngase que la posición de inicio de su trayectoria es A_o . Para que el observador visualice el punto A en la posición A_o , es necesaria una transferencia de información. En este caso, que no existe ninguna sustancia entre A_o y O , la información viaja en forma de luz a una velocidad de c (velocidad de la luz en el vacío). Pasado un intervalo de tiempo Δt , los fotones emitidos desde A_o llegan finalmente a O , habiendo recorrido una distancia de $c \Delta t$. Tal y como se muestra en Fig. 2.

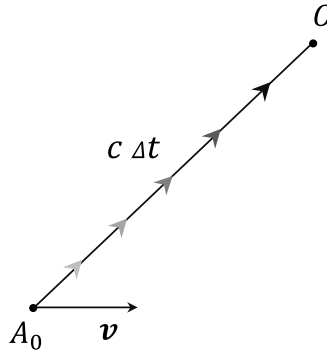


Fig. 2. Distance travelled by the information from A_o to O

Pero en ese intervalo de tiempo, al punto A también le ha dado tiempo a moverse una distancia. Para calcular este desplazamiento, se asumirá que v permanece constante en módulo y dirección durante dicho tiempo (más adelante se generalizará el desarrollo para un caso donde esto no ocurra). Por lo tanto, la distancia recorrida por A será de $v \Delta t$. En la Fig. 3. se muestra como el punto A viaja desde A_o hasta A_f .

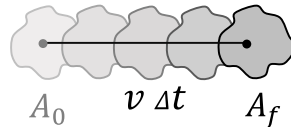


Fig. 3. Distance travelled by the A , from A_o to A_f

En la Fig.4. se juntan ambos desplazamientos en un mismo gráfico.

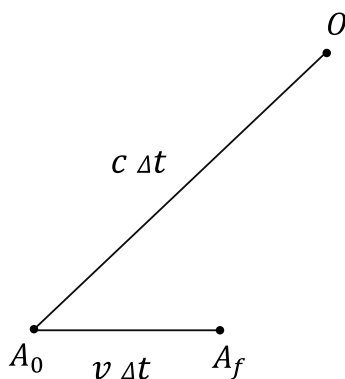


Fig. 4. Joint graph to show the displacement of the point A and the information being O the observer

Por supuesto, la información no solo se transmite en el punto A_o , sino que se envía a lo largo de todo el movimiento entre A_o y A_f . No obstante, para el presente desarrollo matemático, no es necesario centrarse en estas otras trayectorias, pero conviene recordar que existen.

Las dos distancias mostradas en la Fig. 4. son distancias medidas desde el observador O . Pero, ¿qué ocurre si otro observador se moviese solidariamente con el punto A ? Lo primero, para este nuevo observador no existiría diferencia alguna entre A_o y A_f , puesto que desde su perspectiva, es el mundo el que se mueve.

Además, el punto O ahora tendría un movimiento, pero éste se desplazaría en la dirección opuesta a la que se desplazaba A en el caso anterior. La Fig. 5 muestra cómo sería la relación de desplazamientos creada.

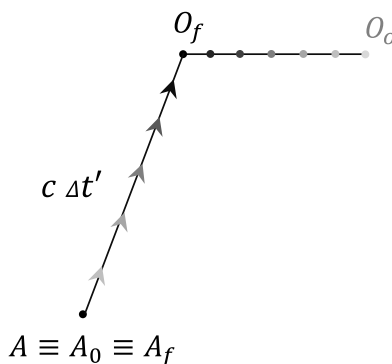


Fig. 5. Joint graph to show the displacement of point O and the information being A the observer

En ella se muestran dos movimientos. Por un lado el desplazamiento de O , desde O_o hasta O_f , y por otro lado la transferencia de información. Esta segunda distancia, es quizás la más compleja de entender. Se trata del mismo fotón que en la Fig. 2 viajaba desde A_o hasta O , pero ahora visto desde el observador móvil solidario al punto A . Por ello, su inclinación es diferente y su longitud es menor (para este caso).

Como se sabe, la velocidad de la luz en el vacío, c , es constante independientemente del observador.

Sin embargo, siendo c constante, la única forma de que la distancia entre A y O_f de la Fig. 5 sea diferente a la distancia entre A_o y O de la Fig. 2 es que el intervalo de tiempo de este nuevo observador sea diferente a Δt .

Éste nuevo intervalo de tiempo se define como $\Delta t'$, es el intervalo de tiempo transcurrido para el punto A al realizar su movimiento desde A_o hasta A_f . Se recuerda que Δt es el intervalo de tiempo que cuantifica la misma acción (movimiento de A desde A_o hasta A_f) pero según lo aprecia el observador O .

En la Fig. 6 se han representado los tres desplazamientos relevantes para este desarrollo matemático. Dos de ellos ($v \Delta t$ y $c \Delta t$) son los que se observan desde el punto O , mientras que el tercero ($c \Delta t'$) es visto por A . Además, se ha usado el ángulo ξ para delimitar la apertura entre $c \Delta t$ y $c \Delta t'$.

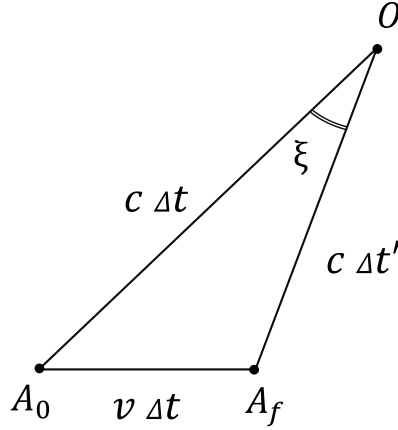


Fig. 6. Joint graph to show the three relevant displacements

A continuación, se ha trazado una recta perpendicular a la velocidad v que pase por O . Al punto de corte (O_{Pr}) de esta perpendicular con la dirección de v se le considera como la proyección de O sobre v . Por otro lado, el ángulo entre esta recta perpendicular y la recta definida por la unión de O con A_o se identificará como ϑ . El convenio de ϑ positivo considerado para el presente desarrollo es el que se muestra en la Fig. 7.

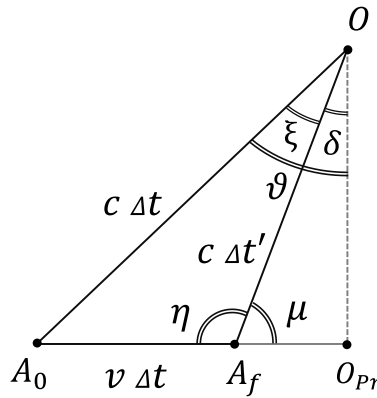


Fig. 7. Projection of the point O and definition of ϑ

Por otro lado, los ángulos η , μ y δ permitirán establecer la relación entre las distancias buscadas. En primer lugar, se relacionan los ángulos del triángulo rectángulo formado por A_f , O_{Pr} y O .

$$\mu + \delta + \pi/2 = \pi \quad (1)$$

Además,

$$\eta = \pi - \mu \quad (2)$$

Luego,

$$\eta = \pi - \left(\pi - (\delta + \pi/2) \right) \quad (3)$$

Simplificando,

$$\eta = \delta + \pi/2 \quad (4)$$

A continuación se aplica el Teorema del Coseno para el triángulo formado por A_0 , A_f y O .

$$(c \Delta t)^2 = (c \Delta t')^2 + (v \Delta t)^2 - 2 v c \Delta t \Delta t' \cos(\delta + \pi/2) \quad (5)$$

Por otro lado, the cosine can be rewritten as,

$$\cos(\delta + \pi/2) = -\sin(\delta) \quad (6)$$

Dividiendo por c^2 ,

$$\Delta t^2 = \Delta t'^2 + \frac{v^2}{c^2} \Delta t^2 + 2 \frac{v}{c} \Delta t \Delta t' \sin(\delta) \quad (7)$$

Aplicando trigonometría, se puede obtener el valor de δ ,

$$\delta = \arctg\left(\frac{c \Delta t \sin(\vartheta) - v \Delta t}{c \Delta t \cos(\vartheta)}\right) = \arctg\left(\frac{\sin(\vartheta) - \frac{v}{c}}{\cos(\vartheta)}\right) \quad (8)$$

Haciendo uso de la siguiente propiedad de trigonometría inversa,

$$\text{sen}(\arctg(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \quad (9)$$

Se obtiene que,

$$\text{sen}\left(\arctg\left(\frac{\sin(\vartheta) - \frac{v}{c}}{\cos(\vartheta)}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2(\vartheta)}{\left(\sin(\vartheta) - \frac{v}{c}\right)^2}}} \quad (10)$$

Reagrupando la ecuación (.....),

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t^2 - \frac{2 \frac{v}{c} \Delta t'}{\sqrt{1 + \frac{\cos^2(\vartheta)}{\left(\sin(\vartheta) - \frac{v}{c}\right)^2}}} \Delta t - \Delta t'^2 = 0 \quad (11)$$

Se define el número adimensional G como la contribución direccional en la deformación del intervalo de tiempo.

$$G = \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{\cos^2(\vartheta)}{\left(\sin(\vartheta) - \frac{v}{c}\right)^2}} \quad (12)$$

Using the factor β to represent v/c ,

$$G = \frac{\beta^2}{1 + \frac{\cos^2(\vartheta)}{(\sin(\vartheta) - \beta)^2}} \quad (13)$$

Obteniendo de esta manera la siguiente ecuación,

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t^2 - 2 \Delta t' \sqrt{G} \Delta t - \Delta t'^2 = 0 \quad (14)$$

Resolviendo para Δt ,

$$\Delta t = \frac{2 \Delta t' \sqrt{G} \pm \sqrt{4 G \Delta t'^2 + 4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t'^2}}{2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (15)$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{G} \pm \sqrt{G + 1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t' \quad (16)$$

El número G es un valor mayor o igual que cero, y lo mismo ocurre con el término $1 - v^2/c^2$. Para que el factor $\Delta t/\Delta t'$ sea siempre positivo, se va a considerar solo el signo + del operador $\pm$.

$$\Delta t = \frac{\sqrt{G} + \sqrt{G + 1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t' \quad (17)$$

La ecuación (17) relaciona dos intervalos de tiempo, siendo Δt el tiempo transcurrido para el observador O , y $\Delta t'$ el tiempo transcurrido para el punto A .

A continuación se va a particularizar la fórmula (17) para dos casos extremos. For a case in which the angle ϑ is exactly,

$$\vartheta = \arcsin\left(\frac{v}{c}\right) \quad (18)$$

The value of G is zero. Thus, the resulting time interval deformation is,

$$\Delta t = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t' \quad (19)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (20)$$

If the value of ϑ is $\pi/2$ or $-\pi/2$ (and of course v is not equal c), the resultant G has the value of v^2/c^2 . In the same way, the equation (.....) becomes,

$$\Delta t = \frac{\sqrt{\frac{v^2}{c^2}} + \sqrt{\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t' \quad (21)$$

$$\Delta t = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t' \quad (22)$$

$$\Delta t = \frac{1 + \frac{v}{c}}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \Delta t' \quad (23)$$

$$\Delta t = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \Delta t' \quad (24)$$

Es importante destacar que la dirección positiva de v es la que se ha adoptado en el convenio de signos según la figura. Y por tanto, el signo de v puede ser tanto positivo como negativo.

En las siguientes gráficas se muestran dos perspectivas de la evolución de G en función de ϑ y β (Fig. 8).

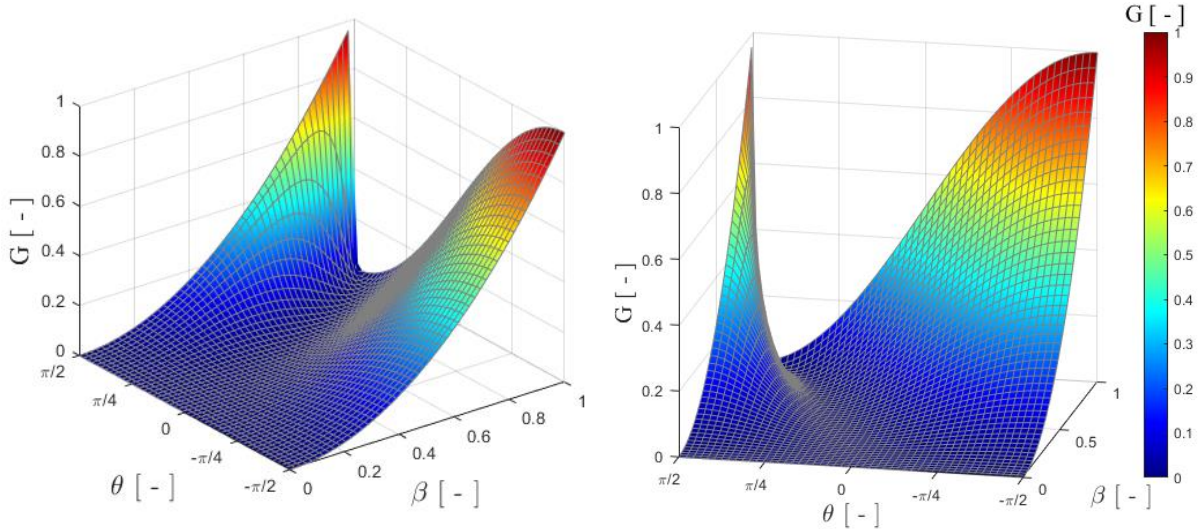


Fig. 8. Two perspectives in the evolution of G as a function of ϑ and β

In the same way, the evolution of the quotient between Δt and $\Delta t'$ has also been plotted as a function of ϑ and β (Fig. 9).

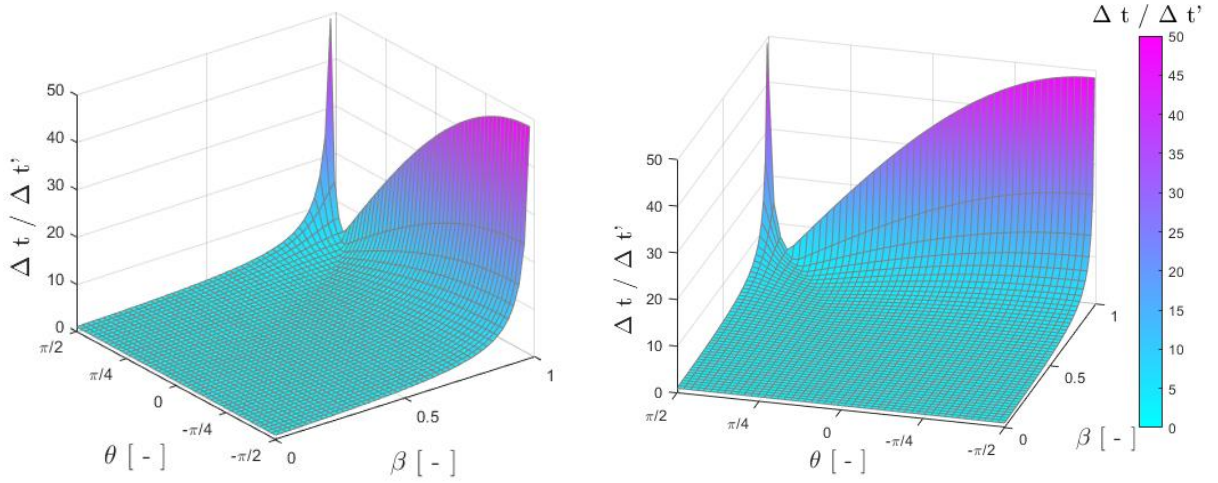


Fig. 9. Two perspectives in the evolution of $\Delta t / \Delta t'$, as a function of ϑ and β

La Fig. 9 sin embargo es muy imprecisa, puesto que cuanto mayor sea la resolución de la malla utilizada para su plotting, los valores de los máximos aumentan infinitamente. Sin embargo, y para visualizar su comportamiento respecto de otros puntos que no se sitúen en el plano de v igual a c (o β igual a 1), el autor ha decidido mostrarla.

Se pasa a analizar todas las posibles ubicaciones de O . Si la distancia $c \Delta t$ se mantiene constante, y se fija el punto A_o , entonces el lugar geométrico de las diferentes ubicaciones de O es una circunferencia centrada en A_o y de radio $c \Delta t$. En la Fig. 10 se han considerado cuatro posibles casos para el radio fijado.

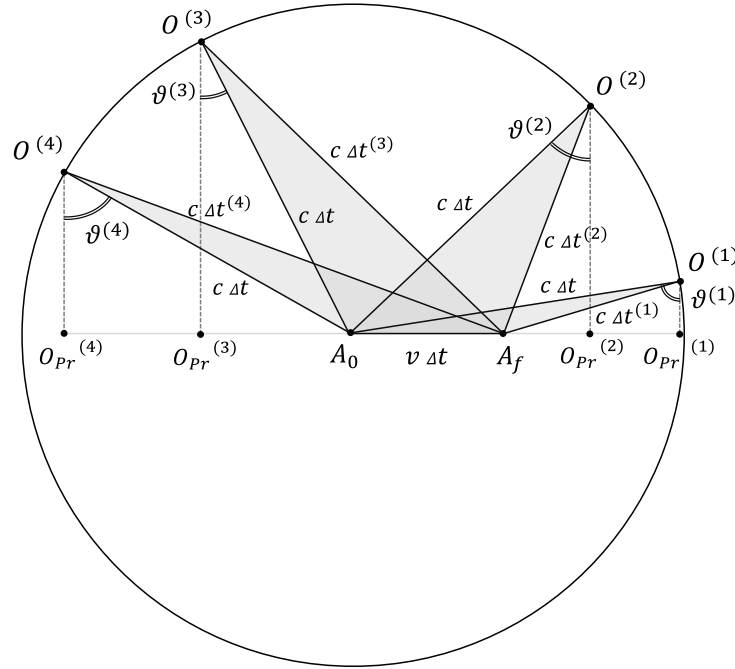


Fig. 10. Relations of the distances for different observers ($O^{(1)}, O^{(2)}, O^{(3)}, O^{(4)}$) with the same v , one moving point (A), and a constant separation between the observers ($O^{(1)}, O^{(2)}, O^{(3)}, O^{(4)}$) and the start point of A (A_o)

Se decide cambiar el radio de la circunferencia, conservando los ángulos $\vartheta^{(1)}$, $\vartheta^{(2)}$, $\vartheta^{(3)}$ y $\vartheta^{(4)}$ y la velocidad v . Tal y como se observa en la Fig. 11, la proporción de las distancias se mantiene constante para cada uno de los cuatro casos.

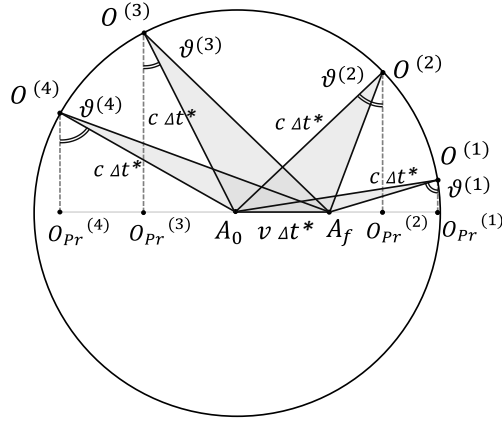


Fig. 11. Conservation of the angles and the proportionality of the distances

La explicación que justifica este efecto adquiere en este estudio la denominación de “semejanza de observadores”.

En primer lugar, el factor de proporcionalidad entre las distancias $c \Delta t$ y $v \Delta t$ es c/v . Este factor no cambia de una figura a otra o de un caso a otro, porque no depende de Δt . Si el observador está más cerca de A_0 , entonces la información llegará antes al observador. Dicho de otra forma, el intervalo de tiempo (Δt^*) que tarda la luz en llegar hasta el observador en la Fig. 11, es menor que el de la Fig. 10 (Δt). De la misma manera, el punto A tiene menos tiempo para avanzar, por lo tanto, su recorrido es menor.

El resultado es una semejanza de triángulos como la mostrada en la Fig. 12 para uno de los cuatro casos, concretamente el tercero.

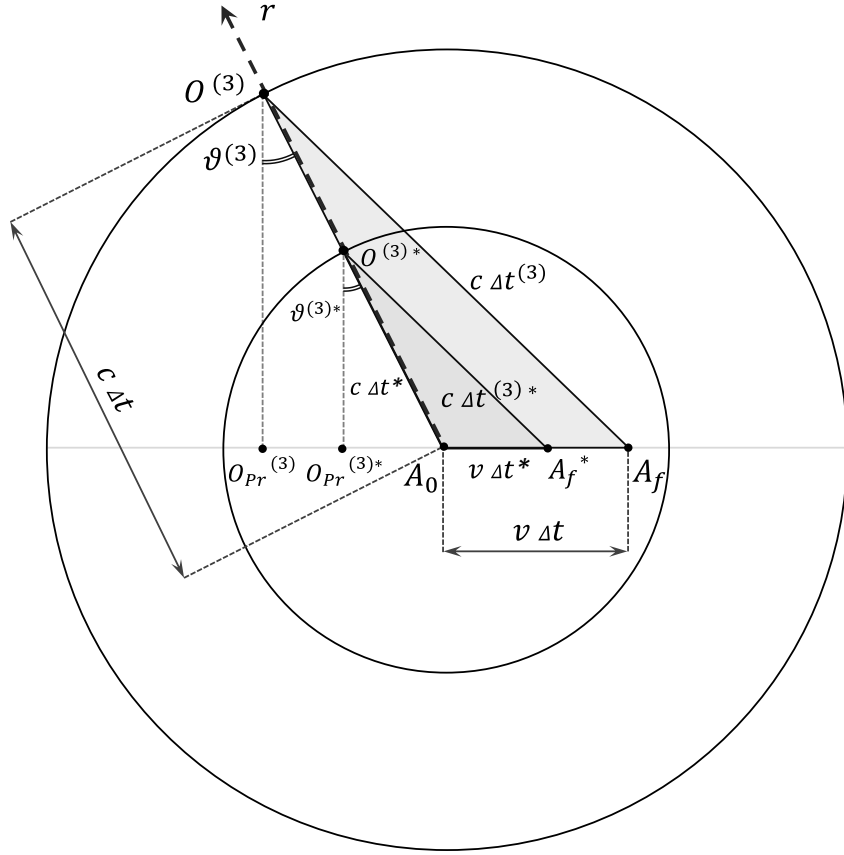


Fig. 12. Semejanza de triángulos y observadores

Puesto que los triángulos son semejantes, se puede utilizar la siguiente igualdad de longitudes.

$$\frac{c \Delta t}{c \Delta t^*} = \frac{c \Delta t^{(3)}}{c \Delta t^{(3)*}} \quad (25)$$

La velocidad de la luz puede despejarse, y la equivalencia sería en unidades de tiempo.

$$\frac{\Delta t}{\Delta t^*} = \frac{\Delta t^{(3)}}{\Delta t^{(3)*}} \quad (26)$$

Reescrito,

$$\frac{\Delta t}{\Delta t^{(3)}} = \frac{\Delta t^*}{\Delta t^{(3)*}} \quad (27)$$

Es decir, la deformación temporal $\Delta t / \Delta t^{(3)}$ es exactamente la misma que $\Delta t^* / \Delta t^{(3)*}$. Resultado que se esperaba de antemano puesto que en la fórmula (17) las dos únicas variables son ϑ y v , que en este análisis son las mismas para ambos observadores.

Otra forma de entender esta explicación es la siguiente. tanto el observador $O^{(3)}$ como el observador $O^{(3)*}$ observan a A con la misma velocidad (en módulo y dirección), por tanto cualquier intervalo temporal que transcurra para $O^{(3)}$ también transcurriría para $O^{(3)*}$.

Por consiguiente, todos aquellos observadores que estén sobre la recta r de la Fig. 12 son semejantes. Esto quiere decir que el factor de deformación temporal es el mismo (cociente entre el intervalo de tiempo del observador y el intervalo de tiempo del punto A).

Este concepto de semejanza de observadores se usará más adelante para generalizar los resultados al movimiento no inercial.

A modo de comentario, puesto que v no puede superar la velocidad de la luz, la distancia $v \Delta t$ nunca podrá ser mayor que $c \Delta t$.

Un análisis análogo al explicado en la Fig. 10, es el mostrado en la Fig. 13. Con la diferencia de que ahora el centro de la circunferencia es el observador O y hay cuatro puntos en movimiento (A, B, D, E). En el fondo son los mismos casos que antes, representados de otra manera.

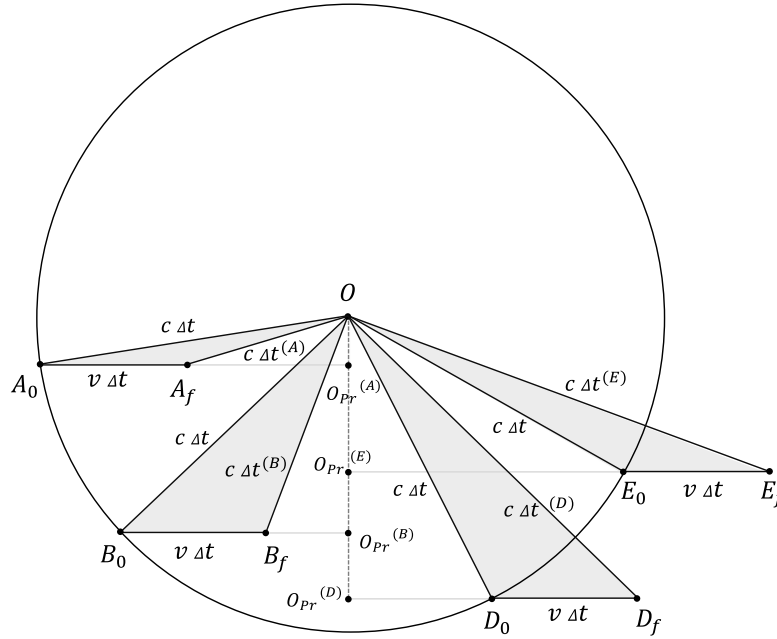


Fig. 13. Distance relations for different moving points (A, B, D, E) with the same v , one observer (O), and a constant separation between the observer (O) and start points (A_o, B_o, D_o, E_o)

Diferentes autores han desarrollado en profundidad el uso de (20). Dicha formula, atendiendo a lo expuesto en el presente desarrollo, es válida para un caso como el de la Fig. 14.

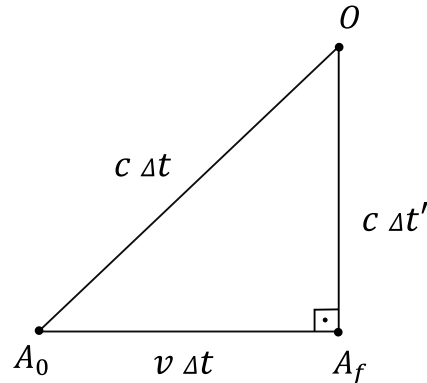


Fig. 14. Relación de velocidades para el caso concreto donde el valor de ϑ es $\arcsin(v/c)$

Por otro lado, como bien es sabido, para la aplicación la fórmula (20) es necesario que el sistema considerado sea inercial. Es decir, el módulo y la dirección de v no pueden cambiar. No obstante, esto presenta el inconveniente mostrado en la Fig. 15.

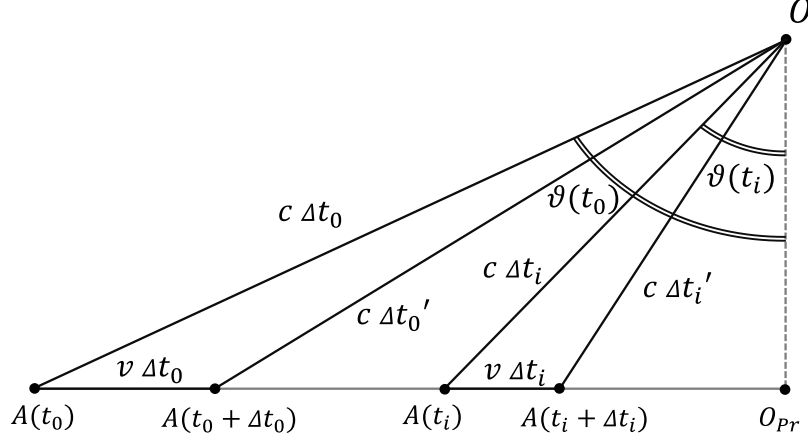


Fig. 15. Trayectoria de un punto A cuya velocidad v es constante en módulo y dirección respecto del sistema de referencia del observador situado en O

Como se observa, el ángulo ϑ cambia según la posición, por ello, la relación entre intervalos de tiempo no sería constante,

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t'_0} \neq \frac{\Delta t_i}{\Delta t'_i} \quad (28)$$

Aplicando la semejanza de observadores, el valor de Δt puede ser cualquiera se cual sea el observador, lo único que modifica el factor $\Delta t / \Delta t'$ es el módulo de la velocidad (v) y el ángulo ϑ . Por ello, el punto A no necesita llegar hasta A_f para poder aplicar (17). Es decir, el punto A_f es un punto ficticio. El problema que enseña la Fig. 15 es que el ángulo ϑ cambia entre $A(t_0)$ y $A(t_0 + \Delta t_0)$. Si $A(t_0)$ y $A(t_i)$ estuviesen separados por una distancia muy inferior a $v \Delta t_0$, estarían realizando parte de un mismo recorrido y sin embargo la relación entre intervalos de tiempo seguiría siendo diferente, puesto que los ángulos $\vartheta(t_0)$ y $\vartheta(t_i)$ no son iguales.

La respuesta a este problema es que los instantes en los que se utilice la ecuación (17) sean infinitesimales. De esta forma tanto el módulo de v y valor de ϑ se mantienen constantes.

Entonces ¿qué ocurre con todos los casos que se han explicado hasta ahora? Todos ellos han sido idealizados. Ninguno representa la realidad. Pero son necesarios para entender este concepto y los que siguen a continuación.

Recapitulando, la fórmula (17) es aplicable para cualquier intervalo de tiempo en el que el módulo de v y valor de ϑ sean constantes. Sin embargo, esto no es así en la gran mayoría de los movimientos. La trayectoria de un punto puede ser muy compleja, como la que se enseña en la Fig. 16.

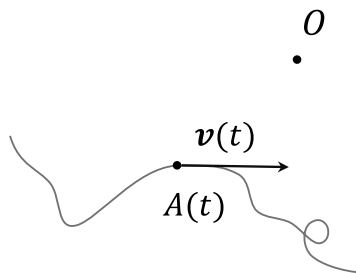


Fig. 16. Complex trajectory traced by point A

El símbolo (t) refleja la dependencia temporal de ambas variables v (vector velocidad) y A (posición). Como hasta ahora, es necesario especificar el observador (O) con respecto al cual el punto A tiene esa velocidad.

Esta trayectoria, podría estudiarse como la suma de pequeños segmentos de longitud infinitesimal. De esta forma, en cada uno de estos tramos, el cambio producido en v y ϑ sería despreciable.

Cabría pensar que la forma de representar el desplazamiento diferencial y las relaciones de distancias es la mostrada en la Fig. 17. Sin embargo esta representación tiene dos errores, marcados en rojo.

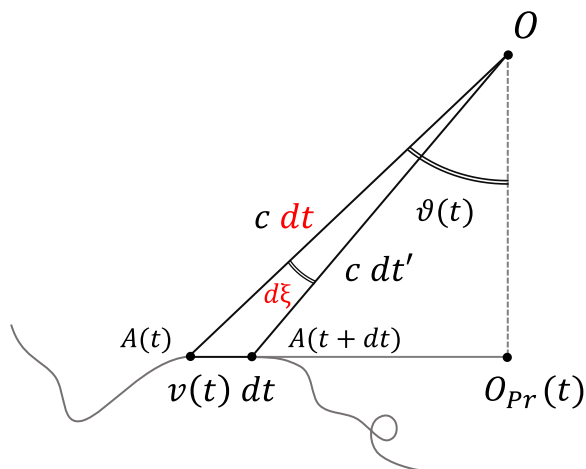


Fig. 17. Diagrama erróneo para el estudio de un desplazamiento diferencial

El primer error es suponer que la información viaja durante un diferencial de tiempo desde el punto $A(t)$ hasta O . El observador se ha escogido aleatoriamente y podría encontrarse a una gran distancia del punto A , muy superior a $c dt$.

El segundo error está relacionado con el primero. El triángulo escogido para relacionar las distancias no es el correcto, esto se deduce entre otras cosas por el ángulo infinitesimal $d\xi$.

El método aceptado en este estudio consiste en aplicar la semejanza de observadores. De esta manera, el intervalo de tiempo percibido por el observador semejante o imaginario será igual al intervalo percibido por el observador real. El observador semejante se identificará como $O^*(t)$, con este nuevo observador sí se podrá aplicar la ecuación (17) en su forma diferencial. Puesto que su triángulo de distancias con el punto $A(t)$ sí tendrá un lado de valor $c dt$. Esto puede observarse en la Fig. 18.

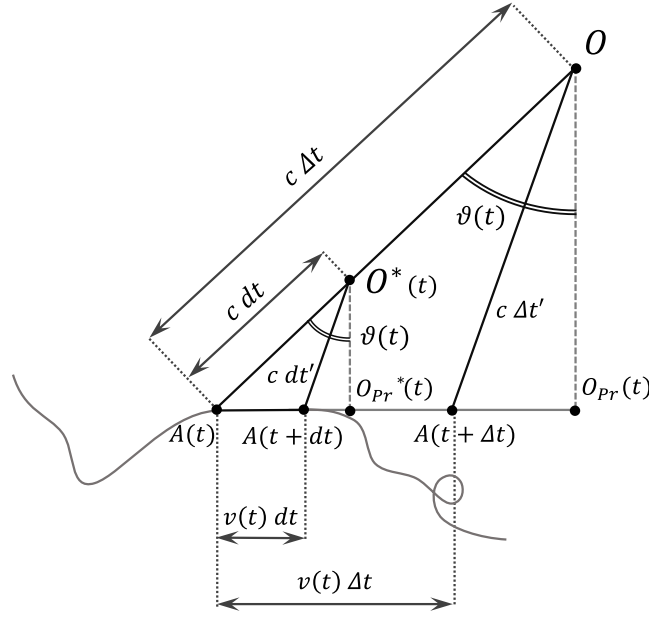


Fig. 18. Relación de distancias del observador semejante, $O^*(t)$, y del observador real $O(t)$

Nótese que el triángulo formado por $A(t)$, $A(t + \Delta t)$ y $O(t)$ contiene un intervalo de tiempo (Δt) mucho mayor que dt . Éste solo se ha representado en la Fig. 18 para entender la diferencia entre ambos triángulos, el valor de Δt de la Fig. 18 no es relevante para este desarrollo.

Sustituyendo en (17) los valores de Δt por dt y $\Delta t'$ por dt' , y añadiendo la dependencia temporal

$$dt = \frac{\sqrt{G} + \sqrt{G + 1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt' \quad (29)$$

Tomando integrales a ambos lados de la ecuación,

$$\int_t^{t+\Delta t} dt = \int_{t'}^{t'+\Delta t'} \frac{\sqrt{G} + \sqrt{G + 1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt' \quad (30)$$

$$\Delta t = \int_{t'}^{t'+\Delta t'} \frac{\sqrt{G} + \sqrt{G + 1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt' \quad (31)$$

Tanto v como G dependen de la trayectoria, y por tanto del tiempo. Ambas variables pueden expresarse en función del tiempo t o del tiempo t' . Puesto que la integral en la derecha de la ecuación se hace para el dominio de t' será necesario expresar las variables en función de t' .

$$\Delta t = \int_{t'}^{t'+\Delta t'} \frac{\sqrt{G(t')} + \sqrt{G(t') + 1 - \frac{v(t')^2}{c^2}}}{1 - \frac{v(t')^2}{c^2}} dt' \quad (32)$$

$v(t')$ es la velocidad relativa del punto A con respecto al punto O , midiendo su evolución con el paso del tiempo del punto A , es decir, t' .

Sin embargo, el observador está situado en O , y la variable temporal de O es t , no t' . Por lo que medir la evolución de v en función del tiempo t' puede ser una labor compleja.

Una forma de proceder para solucionar este problema sería cambiar de sitio la integral y poner en función de t las variables v y G . Esto implica invertir la fracción que se encuentra en el argumento de la integral.

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}{\sqrt{G(t)} + \sqrt{G(t) + 1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} dt = \Delta t' \quad (33)$$

En definitiva, el objetivo es calcular $\Delta t'$ (intervalo de tiempo transcurrido para A) para un determinado Δt (intervalo de tiempo transcurrido para O).

Este desarrollo se ha hecho para una curva en dos dimensiones. No obstante, es aplicable a trayectorias tridimensionales. Con la excepción de que en cada momento habrá que considerar el plano formado por la dirección de la velocidad y el observador. El triángulo que relaciona las distancias quedará contenido dentro de dicho plano y las anteriores ecuaciones seguirían siendo válidas. Siempre y cuando se respete el criterio de signos establecido.

Por supuesto, hay determinadas trayectorias de A que permiten utilizar la ecuación (17) en lugar de su versión diferencial con integrales. Estas trayectorias, denominadas en este estudio como características, tienen una propiedad común, el ángulo ϑ , el módulo y el signo de v es constante durante la trayectoria. La Fig. 19 muestra un ejemplo en el que esta condición se cumple. En este caso el con valores de ϑ son positivos, la curva resultante es una espiral convergente. Esto se debe a que el punto móvil se acerca al observador a medida que avanza el tiempo. Para valores mayores de ϑ la espiral tiende a converger con mayor rapidez.

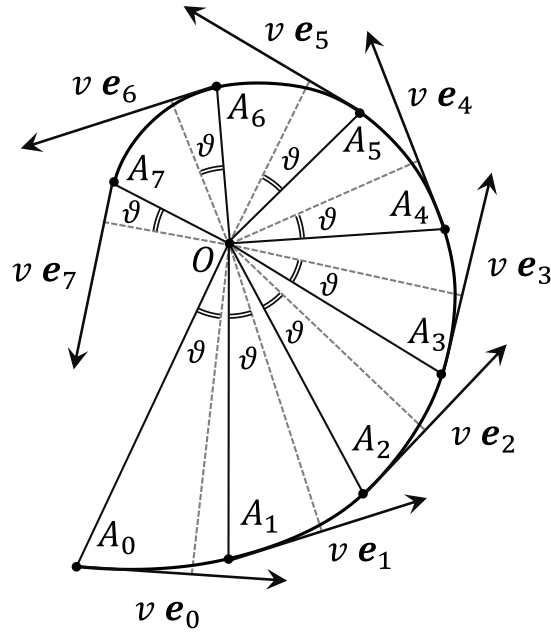


Fig. 19. Espiral convergente (ϑ positivo) generada manteniendo ϑ y v constantes

Los puntos $A_0, A_1, \dots, A_6$ y A_7 representan diferentes puntos en los que se comprueba que ϑ permanece constante. La velocidad, cuyo módulo v también es constante, cambia de dirección dependiendo del instante considerado. La dirección de v es en todo momento es tangente a la trayectoria, ésta se ha representado con los vectores unitarios $e_0, e_1, \dots, e_6$ y e_7 .

Si se diese el caso de que ϑ es cero (con ϑ y v constantes), entonces la curva resultante sería una circunferencia como la mostrada en la Fig. 20.

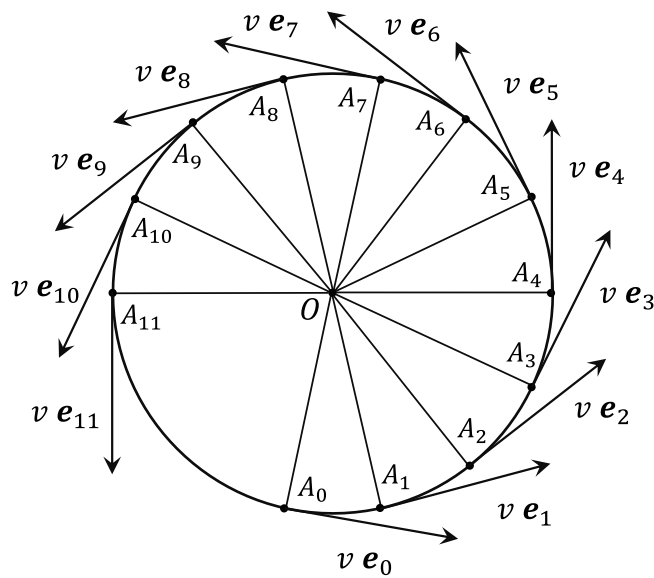


Fig. 20. Circunferencia (ϑ nulo) generada manteniendo ϑ y v constantes

En el caso de que ϑ sea negativo se obtiene una espiral divergente, que se aleja cada vez más del observador, como la representada en la Fig. 21. De nuevo, cuanto mayor sea el módulo de ϑ , se alejará de O con mayor rapidez.

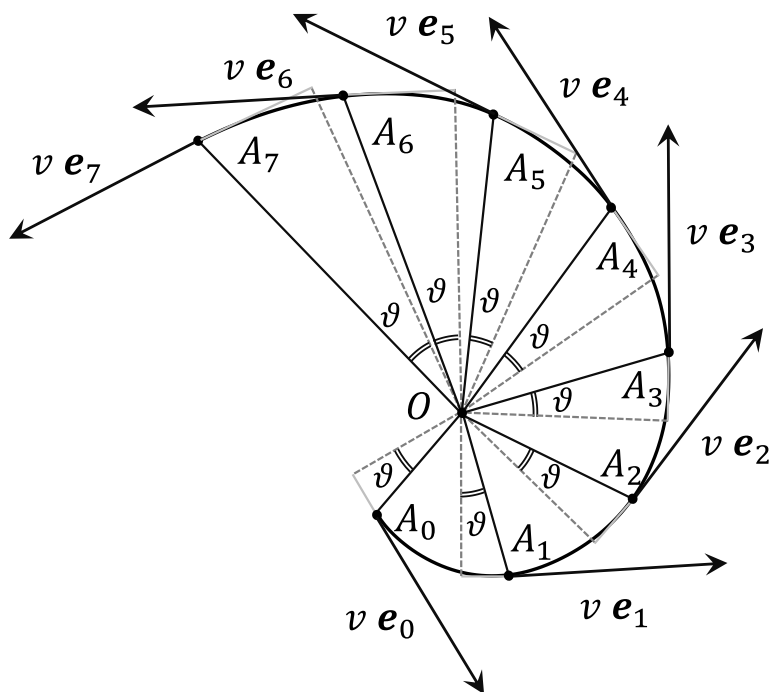


Fig. 21. Espiral divergente (ϑ negativo) generada manteniendo ϑ y v constantes

Es importante recordar que los valores de ϑ están comprendidos entre $\pi/2$ y $-\pi/2$. En el caso extremo en el que ϑ adquiriera uno de estos valores, la curva degeneraría en una recta. Si ϑ fuese positivo ($\pi/2$) el punto A viajaría hacia O , mientras que si fuese negativo ($-\pi/2$) se alejaría de O .